1. No reality show POTI (Programa Os Treinadores de Iguanas) estão concorrendo 5 pessoas: Armando, Barney, Celta, Deidara e Evaristo. Na primeira semana do programa, acontecerá uma votação em que cada um dos participantes votará em outro participante para sair do programa, não podendo votar em si mesmo e nem votar nulo/branco. Como os participantes não se conhecem bem ainda, decidiram escolher aleatoriamente, de forma equiprovável, alguém na hora da votação.
2. Qual a probabilidade de todo mundo receber exatamente 1 voto?

Resposta: Cada participante pode votar em um dos outros 4 participantes. Podemos visualizar isso como 5 caixas, cada caixa com a letra do Participante que está votando, e dentro desta caixa a letra do Participante o qual foi votado. Sendo assim, os casos totais são: 4.4.4.4.4 = = 1024.   
 Como cada participante não pode votar em si mesmo e vai receber exatamente 1 voto, é possível observar o problema como as permutações caóticas de ABCDE (cada voto dentro da caixa). A permutação caótica de 5 elementos distintos é aproximadamente . Arredondando, fica 44 casos (o arredondamento também funciona considerando e = 2,75). Logo, a probabilidade é .  
  
Outra forma de forma de calcular os casos favoráveis: Também podemos analisar a situação usando grafos direcionados em que cada vértice é uma pessoa e a seta aponta para quem a pessoa votou. Existe duas formas de desenhar esse grafo:  
Foto em preto e branco

Descrição gerada automaticamente

Agora falta nomear cada vértice para achar a possibilidade correspondente. No caso i), nomear os vértices se trata de uma permutação circular, logo existem (5-1)! = 24 casos. No caso ii), escolhemos uma dupla para o grupo da esquerda e os 3 que sobrarem permutamos circularmente. Ficando assim .(3-1)! = 20 casos. Assim, totalizando 20 + 24 = 44 casos.

1. Sabendo que Armando não votou em Evaristo e Evaristo não votou em Armando, qual a probabilidade de todo mundo receber exatamente 1 voto?

Resposta: Com essa informação, temos 3 possibilidades de voto do Armando e 3 possibilidades de voto do Evaristo, e o restante continua 4 possibilidades. Logo, os casos totais são 3.3.4.4.4 = Usando um raciocínio análogo ao item anterior, não é possível votar em si mesmo e cada um recebeu exatos um voto, então o conjunto de respostas válidas está contido no conjunto de permutações caóticas (que são 44). Sendo assim, podemos remover os casos de permutações caóticas que não são válidos no nosso cenário.

Caso 1) Armando votou em Evaristo  
Nesse caso, fixamos o E na primeira posição. Nas outras 4 posições (ou caixas com letras, se preferir), nos sobra para colocar A, B, C ou D. Perceba nessa situação, o ‘A’ não tem como ficar na posição 1 (ou caixa com a letra A), então em qualquer lugar é válido, entretanto B, C e D podem ficar na posição original. Então, de maneira análoga a dedução da fórmula da permutação caótica, vamos fixar um elemento na sua posição original e permutar o resto, e depois ir removendo/adicionando para corrigir a conta. Então o total de formas de permutar esses 4 são 4! = 24.   
Permutação inválidas: Fixando um dos três na posição original e permutando o resto (incluindo o A) temos: .3! = 18; Fixando dois dos três e permutando o resto: .2! = 6; Fixando três dos três e permutando o resto: .1! = 1; Logo o total de permutações inválidas é: 18 – 6 + 1 = 13. Logo as permutações válidas são 24 – 13 = 11.

Caso 2) Evaristo votou em Armando  
De forma análoga ao Caso 1, fixamos o A na última posição e ficamos em um cenário paralelo ao caso 1 (B,C e D podem ser fixados na posição original enquanto E não), sendo assim, também possui 11 casos.   
  
Intersecção) Fixando o E na primeira posição e o A na última posição, nos sobra B, C e D que podem ficar na posição original. Ou seja, uma permutação caótica de 3 elementos, que é igual a 2 (calculando usando a fórmula ou até fazendo na mão os casos).   
  
Por fim, significa que a união do Caso1 e do Caso2 é 11 + 11 – 2 = 20. Removendo esses casos dos 44 casos válidos, temos 24 casos correspondentes. Logo, a probabilidade é de .  
  
Outra forma de calcular os casos favoráveis: Se souber que entre as 44 permutações caóticas de ABCDE, é igualmente dividido as que começam em B, C, D e E. Ou seja, existem 44/4 = 11 permutações caóticas que começam em E.

E calculando as que terminam em A e não começam em E: Para a primeira posição tem 3 possibilidades (B, C ou D).   
As posições intermediárias (da 2 até a 4) terá a letra E a duas letras que podem ocupar a posição original. Sendo assim, o total de permutação das posições intermediárias é 3! = 6. Para calcular os casos inválidos, usaremos novamente a estratégia de fixar elementos. Fixando um dos dois elementos e permutando o resto: .2! = 4; Fixando os dois elementos e permutando o resto: .1! = 1; Logo os casos inválidos são 4 – 1 = 3, de um total de 6 casos, logo os casos válidos são 3 (como são poucos, também é valido tentar escrever cada um).  
  
 Juntando essas informações, temos 3 possibilidades para a primeira posição e 3 casos válidos para os termos intermediários, logo os casos totais são 3.3 = 9. Por fim, como os dois cenários calculados são excludentes, portanto a união será a soma: 11 + 9 = 20. Removendo esses da permutação caótica temos 44 – 20 = 24 casos correspondentes.   
  
Outra forma de calcular os casos favoráveis: Usando o grafo construído no item a):  
Foto em preto e branco

Descrição gerada automaticamente

Temos que no cenário i) , A e E não podem ser adjacentes. Sendo assim, podemos pegar os casos totais da permutação circular (24 casos) e remover os que A e E ficam adjacentes. Fixando que A e E são adjacentes, eles podem permutar entre si, assim como os outros 3 podem permutar entre si, ficando assim 2!.3! = 12 casos. Removendo dos 24, temos 12 caso válidos.   
Agora na situação ii), A e E não podem estar no mesmo ciclo fechado (porque dai eles seriam adjacentes). Calculando esses casos inválidos temos que: A e E estando na esquerda, sobra 3 elementos que permutando circularmente (2 casos). E A e E estando na direita, temos 3 possibilidades para ser o vértice que completa o trio e temos uma permutação circular de 3 pessoas, e os 2 que sobraram ficam para o lado esquerdo. Assim, temos 3.(3-1)! = 6 casos. Totalizando 8 casos inválidos. Removendo esses 8 dos 20 casos (calculado no item a), temos 12 casos válidos.   
Por fim, somando o cenário i) e ii), temos 12 + 12 = 24 casos válidos.

1. Os Sete Anões são personagens famosos do filme *Branca de Neve e os Sete Anões*. São eles: Dunga, Zangado, Mestre, Soneca, Atchim, Dengoso e Feliz. A Rainha Má, em uma tentativa de acabar com a amizade do grupo de anões, lançou um feitiço de esquecimento na relação entre cada dois anões quaisquer. Entretanto, algumas amizades podem ser tão fortes que o feitiço não funcione. Ou seja, existe, por exemplo, a possibilidade de todos esquecerem uns dos outros, todos se lembrarem uns dos outros, ou apenas algumas duplas se lembrarem um do outro. Se um anão X lembra do anão Y, então o anão Y lembra do anão X.
   1. Prove que é impossível cada anão lembrar de uma quantidade de amigos diferente.

Resposta: Analisando o exercício como um grafo, com os vértices sendo a cada um dos anões, temos que uma aresta entre dois anões é quando um se lembra do outro, assim o grau de um vértice é quantas pessoas esse se anão lembra. Ele pode lembrar de 0 a 6 pessoas.

Por absurdo, vamos admitir que é possível cada vértice ter um grau distinto. Nesse caso teríamos todas as possibilidades, de 0 a 6, ocupadas. A contradição do absurdo pode ser encontrada de duas formas.  
A primeira forma é argumentar que, se existe um vértice de grau 6 (que se relaciona com todos os demais vértices), é impossível, ao mesmo tempo, existir um vértice de grau 0 (que não se relaciona com nenhum vértice). Outra forma é argumentar que como se trata de um grafo simples, a soma dos graus dos vértices tem que ser par (porque é o dobro do número de arestas, e arestas é um número inteiro não-negativo), entretanto a soma dos graus de 0 a 6 é igual a 21, que é ímpar.

Pelo princípio da casa dos pombos, se eu tiver uma ou mais gaiolas de possibilidades a menos (já que não é possível ser de 0 a 6), eu garanto que uma gaiola terá dois pombos, em outras palavras, haverá dois anões que lembram da mesma quantidade de amigos.

* 1. Após o feitiço, quantos cenários possíveis existem?  
     Resposta: Uma maneira de analisar o problema é pensar que antes do feitiço, o grafo de amizades entre os anões é um grafo fortemente conexo (ou seja, entre qualquer dois vértices, existe uma aresta conectando-os), e que após o feitiço cada aresta pode ter sumido ou não, formalmente falando, sendo A o conjunto de arestas antes do feitiço e A\* o conjunto de arestas após os feitiços, A\* ⊆ A (será formado um subconjunto dessas arestas, que pode ser o conjunto vazio e pode ser igual o conjunto original). A quantidade de subconjuntos de A é (ou pode-se argumentar que, para cada aresta, ela pode desaparecer ou não, sendo assim 2 possibilidades por aresta). Agora nos resta calcular o número de arestas.   
      Uma maneira de fazer isso é usando a fórmula da soma dos graus do vértice ser igual ao dobro da quantidade de arestas. Assim, temos 7 vértices de grau 6, a soma dará 42, e dividido por 2 resulta em 21 arestas. Logo, existem cenários possíveis.  
      Outra maneira de fazer isso é desenhar o grafo e contar o número de arestas e perceber que, ao ir desenhando as arestas saindo de um vértice, o primeiro vértice saíra 6 arestas, o segundo sairá 5, o próximo 4, até o 7° vértice que já estará conectado a todos os outros. Uma forma elegante de explicar tal comportamento é pela definição de um grafo usando uma matriz.

Tela de computador com texto preto sobre fundo branco

Descrição gerada automaticamente  
Na representação em uma matriz 7x7, é possível ver que a diagonal principal é completada por 0 e os demais são completados por 1, e que cada aresta está sendo contada 2 vezes pela relação de simetria (abaixo e acima da diagonal principal é simétrico). O total de termos da matriz é 7.7=49, a diagonal tem 7 elementos, ficando assim (49-7)/2 = 21 arestas (está análise facilita a dedução da fórmula usada na outra maneira de resolver, além da visualização de que esses valores, após o feitiço, pode ser 0 ou 1, duas possibilidades).

* 1. Branca de Neve, para ajudar seus amigos, encontrou a poção da Amizade, cujo lema é “O amigo do meu amigo é meu amigo”, porque, se for possível conectar dois anões que não se conhecem por meio de amigos, após tomar a poção, eles se lembrarão um do outro (X conhece Y, que conhece Z, então X se lembrará de Z, por exemplo). Sabendo que todos os anões se lembram de pelo menos 3 amigos, Branca de Neve conseguirá reatar a amizade de todos os anões? Justifique.

Resposta: Em outras palavras, para que o grafo volte a ser fortemente conexo (igual antes do feitiço) usando essa poção, ele precisa ser conexo (De quaisquer dois vértices, ser possível fazer um passeio começando em um e terminando no outro). É possível provar que um grafo simples de n vértices, maior que um e n ímpar, em que todos os vértices têm grau de pelo menos é conexo (no caso do exercício, n = 7). Com a prova de tal propriedade, segue que Branca de Neve conseguirá reatar as amizades do grupo dos anões.   
 Vamos provar por absurdo. Supondo que no grafo existem o vértice A e B tal que é impossível ir de A até B em um passeio (ou seja, o grafo não é conexo). Como o grau do vértice A é maior ou igual a , considerando o caso mínimo, então existem vértices conectados a A que não devem ser possíveis de fazer um passeio até B (porque senão seria possível ir de A até esse vértice e daí ir até B). Contando com o vértice A, temos 1 + = vértices em que não é possível ir até B. Ou seja, tendo em vista que B não está conectado nele mesmo (grafo simples não admite laço), temos que n – 1 – ( = vértices podem estar conectados a B, assim o grau máximo possível de B seria , o que é uma contradição, já que teríamos que ter que B tem grau de pelo menos . Ou seja, o grafo é conexo.